B.A./B.Sc. (Regular) DEGREE EXAMINATION, MARCH 2009.

(Examination at the end of Third Year)

Part II — Mathematics

Paper III — RINGS AND LINEAR ALGEBRA

(Common for B.A./B.Sc.)

Time : Three hours Maximum : 100 marks

Answer ALL questions.

PART I — $(10 \times 2 = 20 \text{ marks})$

1. Given an example that union of two sub–spaces of $V(F)$ may not be a sub–space of $V(F)$.

   $V(F)$లోని రెండు ఉపాంతరాళాల సమ్మేళనము ఉపాంతరాళముకానట్లు ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

2. Determine the set of vectors $(1,2,0), (0,3,1), (-1,0,1)$ of $V_3(Q)$ are L.D or L.I.

   $V_3(Q)$ లోని సదిశలు సమితి $(1,2,0), (0,3,1), (-1,0,1)$ లు L.D. అవుతాయా లేదా L.I. అవుతాయా తెల్పండి.

3. Find a linear transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ s.t. $T(1,0) = (1,1)$ and $T(0, 1) = (-1, 2)$.

   $T(1,0) = (1,1)$ మరియు $T(0, 1) = (-1, 2)$ అయ్యేటట్లు $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ఋజు పరివర్తనను గణించండి.

4. Find rank of matrix $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

   $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ అను మాత్రిక యొక్క కోటిని తెల్పండి.

5. Prove that square matrices A and A' have same characterstics values.

   చతురస్ర మాత్రికలు A, A' ల లాక్షణిక విలువలు సమానమని చూపండి.

6. Define range and rank of Linear Transformation.

   ఋజు పరివర్తన యొక్క వ్యాప్తి, కోటిలను నిర్వచించండి.

7. Define Field.

   క్షేత్రమును నిర్వచించుము.

8. Write the zero divisors of ring $(Z_6, +, \times)$.

$(Z_6, +, \times)$ అను వలయములోని శూన్య భాజకాలు వ్రాయండి.

9. If $f: R \to R'$ is ring homomorphism then show that $f(0) = 0'$ where $0 \in R, 0' \in R'$.

$f: R \to R'$ వలయ సమరూపత అయితే $f(0) = 0'$ అని చూపండి, ఇక్కడ $0 \in R, 0' \in R'$.

10. Give an example of Left Ideal but not right Ideal.

ఎడమ ఆదర్శమై, కుడి ఆదర్శము కానట్లు ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

PART II — $(10 \times 8 = 80$ marks)

11. (a) State and prove the necessary and sufficient conditions for a non–empty subset W of a vector space $V(F)$ is sub–space.

$V(F)$ లోని శూన్యేతర ఉపసమితి W ఉపాంతరాళము కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలను నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

(b) If $V(F)$ is FDVS and $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m\}$ is L.I sub set of V. Then show that either S itself basis of V or S can be extended to form a basis of V.

$V(F)$ అనునది FDVS మరియు $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m\}$ అనునది V లోని L.I ఉపసమితి అయితే V లో S ఆధారము అవుతుంది లేదా S ను V యొక్క ఆధారంగా విస్తరించవచ్చు అనిచూపండి.

12. (a) If W_1, W_2 are two sub–spaces of FDVS $V(F)$ then show that $Dim(W_1 + W_2) = Dim W_1 + Dim W_2 - Dim(W_1 \cap W_2)$.

$V(F)$ అను FDVS లో W_1, W_2 లు రెండు ఉపాంతరాళాలయితే $Dim(W_1 + W_2) = Dim W_1 + Dim W_2 - Dim(W_1 \cap W_2)$ అని చూపండి.

Or

(b) Show that $\{(1, 0, 0)(1, 1, 0)(1, 1, 1)\}$ is a basis of $C^3(C)$. Hence find the co–ordinates of $(3 + 4i, 6i, 3 + 7i)$ in $C^3(C)$.

$\{(1, 0, 0)(1, 1, 0)(1, 1, 1)\}$ అను $C^3(C)$ లోని సమితి ఆధారము అవుతుందని చూపి $(3 + 4i, 6i, 3 + 7i)$ అను $C^3(C)$ లోని సదిశ యొక్క నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

13. (a) If $U(F)$ and $V(F)$ are two vector spaces and $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ is basis of U. Let $\{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n\}$ be a set of 'n' vectors in V. Then show that there exist a unique linear transformation $T: U \to V$ s.t $T(\alpha_i) = \delta_i, i = 1,2 \ldots n$.

$U(F)$ మరియు $V(F)$ లు రెండు సదిశాంతరాళాలు మరియు $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ అనునది U యొక్క ఆధారము. $\{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n\}$ అనునది V లోని 'n' సదిశల సమితి అయితే $T(\alpha_i) = \delta_i, i = 1,2 \ldots n$ అగునట్లు $T: U \to V$ అనునది ఏకైక ఋజుపరివర్తన అని చూపండి.

Or

(b) If T be a linear operator on $V_3(\mathbf{R})$ defined by $T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + z)$. Prove that T is inversible and find T^{-1}.

$V_3(\mathbf{R})$ పై T అను ఋజు పరికర్తను $T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + z)$ గా నిర్వచిస్తే T విలోమ్యము అనిచూపి, T^{-1} ను కనుక్కోండి.

14. (a) Reduce the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ into normal form and find its rank.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ మాత్రికను అభిలంబరూపములోనికి మార్చి కోటిని తెల్పండి.

Or

(b) Obtain Non singular matrices P and Q s.t PAQ is of the form $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ where $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ అగునట్లు PAQ అనునది $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ రూపంలో వుండునట్లు P ,Q అను సాధారణ మాత్రికలను కనుక్కోండి.

15. (a) For what values of λ, the equations $x + y + z = 1, x + 2y + 4z = \lambda,\ x + 4y + 10z = \lambda^2$ have a solution and solve them completely in each case.

$x + y + z = 1, x + 2y + 4z = \lambda,\ x + 4y + 10z = \lambda^2$ అగునట్లు λ యొక్క ఏ విలువలకు సాధన వుంటుంది. ప్రతి సందర్భములోను సాధించండి.

Or

(b) Solve $x + y - z + t = 0,\ x - y + 2z - t = 0,\ 3x + y + t = 0$.

$x + y - z + t = 0,\ x - y + 2z - t = 0,\ 3x + y + t = 0$ ను సాధించండి.

16. (a) State and prove Caylay–Hamilton theorem.

కేలీ-హామిల్టన్ సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Find characteristic roots and characteristic vectors of $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ అను మాత్రిక యొక్క లాక్షణిక విలువలు మరియు లాక్షణిక సదిశలు కనుక్కోండి.